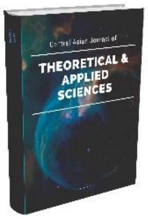

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES

Volume: 02 Issue: 04 | April 2021 **ISSN:** 2660-5317

To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Compound Type

Srazhdinov Ilkhomidin Fayzudinovich
Almalyk branch of Tashkent State Technical University
named after Islam Karimov
israjdinov@bk.ru

Received 10th March 2021, Accepted 27th March 2021, Online 8th April 2021

Abstract*- The article is devoted to the solvability of the mixed problem of a system of two second-order partial differential equations of composite type (hyperbolic-elliptic type). In contrast to previous studies for bounded in, for solving the mixed problem, an initial condition is given in a new setting. It should be noted that in previous studies in the mixed problem, the initial conditions were specified as two separate (separate hyperbolic and separate elliptic) equations. Solutions to various problems are obtained in the form of series, and the absolute and uniform convergence of these series, as well as the series obtained from these series by differentiation with respect to and up to two times, is proved.*

Key words**:** *initial-boundary value problem, composite type, Fourier series, converging and diverging series*

INTRODUCTION

Простейшие скалярные уравнения составного типа издавна привлекали внимание известных математиков [1], в [2,стр.181] такие уравнения называются уравнениями промежуточного типа.

Важности исследования смешанных задач для гиперболических уравнений также обратили внимание известные математики (см. предисловие [3], обзорную часть [4] , а также [5]).

К настоящему времени начально-краевые задачи для гиперболических уравнений исследованы с такой же полнотой, что и задача Коши [3], [4], [5].

Обзор литературы по исследованиям уравнений и систем неклассического типа, в частности, составного типа, а также актуальности этих исследований можно найти в [6].

Прежде всего заметим, что под составным типом подразумевается уравнение или система, которая в каждой точке данной области одновременно обладает свойствами, по крайней мере, двух типов. В данном случае система гиперболо-эллиптического типа.

В настоящее время проводятся исследования одного скалярного уравнения составного типа. (см [7,8,9])

Пусть G - ограниченная область, а граница S - кусочно-гладкая поверхность. Через G_1-обозначим внешность $\overline{G}$, $G_1 = R^3 \setminus \overline{G}$, $G \cup S \cup G_1 = R^3$.См.[10,стр.327].

Пусть функции $p(x) \in C^1(G),\ q(x) \in C(\overline{G}),\ p(x) > 0,\ q(x) \geq 0,\ x \in G.$

Для оператора

$$L = -div(p\,grad) + q, \qquad (1)$$

если рассмотреть задачу о нахождении тех значений λ^2, при которых

$$Lu = \lambda^2 u,\ u\big|_S = 0 \qquad (2)$$

имеет ненулевые решения $u(x)$ из области определения оператора L, то (см. [10]) все собственные значения λ^2 положительны, собственные функции образуют полную ортонормированную систему функций. Естественно предположить, что при изучении природных явлений, любому гиперболическому процессу в той или иной мере окажет влияние эллиптический и наоборот. Как известно [6,стр.402] если в системе $U_{tt} = LU$ дифференциальный оператор L-сильно эллиптический, то данная система является гиперболического типа, но если L -несильно эллиптическая, то данная система является системой составного типа. Рассмотрим следующую систему двух дифференциальных уравнений второго порядка, составного (гиперболо-эллиптического) типа:

$$\begin{cases} U_{tt} - LU = aV, \\ V_{tt} + LV = bU. \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

где L-дифференциальный оператор (1), а U и V вещественные функции вещественных переменных x и t. Система (3) имеет характеристическую форму $\chi(\tau,\xi) = \tau^4 - |\xi|^4$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2$, и поэтому является системой составного типа.

Условие S_{ab}***:*** *Коэффициенты* a,b *правой части системы (3) не равные нулю постоянные числа, такие что* $ab > 0$.

Разделяем переменные $U = TX$ и $V = \theta X$. Пусть $X_n = X_n(x)$- собственные функции, λ_n^2 собственные числа оператора L (см.(1),(2)), а относительно $T = T(t)$ и $\theta = \theta(t)$ получаем:

$$\begin{cases} T_n'' - \lambda_n^2 T_n = a\theta_n, \\ \theta_n'' + \lambda_n^2 \theta_n = bT_n. \end{cases} \qquad (3^*)$$

Лемма 1. *Необходимым и достаточным условием существования и единственности общего решения системы (3*) является условие* S_{ab}.

Различные свойства системы (3*) со специальными коэффициентами с точки зрения механики изучены в [11.стр.199].

Решаем систему (3*) исключая функцию $\theta(t)$

$$\begin{cases} T_n^{IV} - (ab+\lambda_n^4)T_n = 0, \\ \theta_n'' + \lambda_n^2\theta_n = bT_n. \end{cases} \qquad (3^{**})$$

характеристическое уравнение имеет вид $k^4 - (ab+\lambda_n^4) = 0$ (этот случай обозначим через (A)). О различных свойствах первого уравнения системы (3**) с точки зрения механики см. [12. стр.436]. Следовательно, $k_1 = \sqrt[4]{ab+\lambda_n^4},\ k_2 = -k_1,\ k_3 = ik_1,\ k_4 = -ik_1$. Так как k_1 зависить от n впредь k_1 обозначим через k_n. В случае (A) получаем

$$T_n(t) = C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt} + C_3Cosk_nt + C_4Sink_nt \qquad (4)$$

$$\theta_n(t) = \left[\alpha_n^-(C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt}) - \alpha_n^+(C_3Cosk_nt + C_4Sink_nt)\right]$$

$$T_n'(t) = k_n(C_1e^{k_nt} - C_2e^{-k_nt}) - k_n(C_3Sink_nt - C_4Cosk_nt)$$

$$\theta_n'(t) = \left[k_n\alpha_n^-(C_1Cosk_nt - C_2Cosk_nt) - k_n\alpha_n^+(C_4Cosk_nt - C_3Sink_nt)\right],$$

где $\alpha_n^{\pm} = \dfrac{k_n^2 \pm \lambda_n^2}{a}$, очевидно, $\alpha_n^+ + \alpha_n^- = \dfrac{2k_n^2}{a}$, $\quad a\alpha_n^+\alpha_n^- = \left(\dfrac{k_n^4 - \lambda_n^4}{a}\right) = b$; $(k_n \approx \lambda_n)$

Аналогично можно решить систему (3*) исключая $T(t)$ (случай (B)), тогда

$$\theta_n(t) = C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt} + C_3Cosk_nt + C_4Sink_nt, \qquad (5)$$

$$T_n(t) = \beta_n^+\left(C_1e^{k_nt} + C_ne^{-k_nt}\right) - \beta_n^-(C_3Cosk_nt + C_4Sink_nt)$$

$$\theta_n'(t) = k_n(C_1e^{k_nt} - C_2e^{-k_nt}) - k_n(C_3Sink_nt - C_4Cosk_nt).$$

$$T_n'(t) = k_n\beta_n^+(C_1e^{k_nt} - C_2e^{-k_nt}) + k_n\beta_n^-(C_3Sink_nt - C_4Cosk_nt),$$

где аналогично предыдущему случаю имеем

$$\beta_n^{\pm} = \frac{k_n^2 \pm \lambda_n^2}{b}; \qquad \beta_n^+ + \beta_n^- = \frac{2k_n^2}{b}, \qquad b\beta_n^+\beta_n^- = \left(\frac{k_n^4 - \lambda_n^4}{b}\right) = a.$$

Таким образом, в случае (A) получаем

$$T_n''(t) = k_n^2(C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt} - C_3Cosk_nt - C_4Sink_nt)$$

$$\theta_n''(t) = k_n^2\alpha_n^-(C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt}) + k_n^2\alpha_n^+(C_3Cosk_nt + C_4Sink_nt)$$

или в случае (B)

$$\theta_n''(t) = k_n^2(C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt} - C_3Cosk_nt - C_4Sink_nt)$$

$$T_n''(t) = k_n^2\beta_n^+(C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt}) + k_n^2\beta_n^-(C_3Cosk_nt + C_4Sink_nt)$$

Нетрудно проверить,

$$\begin{cases} T_n''(t) - \lambda_n^2 T_n(t) = a\theta_n(t), \\ \theta_n''(t) + \lambda_n^2 \theta_n(t) = bT_n(t). \end{cases} \Rightarrow \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_n'' - \lambda_n^2 T_n = a\theta_n(t), \\ \left(k_n^2\alpha_n^- + \lambda_n^2\alpha_n^-\right)\{1\} + \left(k_n^2\alpha_n^+ - \lambda_n^2\alpha_n^+\right)\{2\} = \left(\alpha_n^-\right)\left(a\alpha_n^+\right)\{1\} + \left(\alpha_n^+\right)\left(a\alpha_n^-\right)\{2\} = bT_n(t). \end{cases} \qquad (6)$$

где $\{1\} = C_1 e^{k_n t} + C_2 e^{-k_n t}, \{2\} = C_3 Cosk_n t + C_4 Sink_n t$

Так как $k_n^4 - ab - \lambda_n^4 = 0 \Rightarrow \dfrac{k_n^4 - \lambda_n^4}{a} = b$

Аналогично и для случая (B). Очевидно, так как $k_n^4 - ab - \lambda_n^4 = 0$ и $\{1\} + \{2\} = \theta_n(t)$, т.е. полученные функции $T_n(t),\ \theta_n(t)$ удовлетворяют системе уравнений (3*), что и доказывает лемму 1. Принимая во внимание обозначения $\alpha_n^{\pm} = \dfrac{k_n^2 \pm \lambda_n^2}{a}$ в случае (A) и $\beta_n^{\pm} = \dfrac{k_n^2 \pm \lambda_n^2}{b}$ в случае (B), а также замечая, что $\alpha_n^+ + \alpha_n^- = \dfrac{2k_n^2}{a}$, $\alpha_n^+\alpha_n^- = \dfrac{b}{a}$ (либо $\beta_n^+ + \beta_n^- = \dfrac{2k_n^2}{b},\ \beta_n^+\beta_n^- = \dfrac{a}{b}$) отсюда полагая $t = 0$ для $T_n(0),\ \theta_n(0),\ T_n'(0),\ \theta_n'(0)$ получаем систему четырех уравнений с неизвестными C_1, C_2, C_3, C_4 (аналогично для случая (B)). Заметим, что в знаменателях $\alpha_n^{\pm}$ и $\beta_n^{\pm}$ соответственно присутствует коэффициенты правой части системы (3). Следовательно, если какое либо из этих коэффициентов равны нулю решение системы (3) не существует, что и окончательно доказывает лемму 1.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = T_n(0), \\ \alpha_n^-\left(C_1 + C_2\right) - \alpha_n^+ C_3 = \theta_n(0), \\ k_n\left(C_1 - C_2\right) + k_n C_4 = T_n'(0), \\ k_{\partial n}\alpha_n^-\left(C_1 - C_2\right) - k_n\alpha_n^+ C_4 = \theta_n'(0). \end{cases} \quad (A) \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \theta_n(0), \\ \beta_n^+\left(C_1 + C_2\right) - \beta_n^- C_3 = T_n(0), \\ k_n\left(C_1 - C_2\right) + k_n C_4 = \theta_n'(0), \\ k_n\beta_n^+\left(C_1 - C_2\right) - k_n\beta_n^- C_4 = T_n'(0). \end{cases} \quad (B)$$

Заметим, что в знаменателе детерминанта системы (A) присутствует коэффициент a (в случае (B) в знаменателе присутствует b) системы (3). Кроме того следует заметить, что в системе (3) случаи $a = 0$ либо $b = 0$ соответсвуют классическому случаю, когда одно уравнение однородное, а второе неоднородное. В данном случае это не представляет интереса. Поэтому случаи $a = 0$ и $b = 0$ исключаем, как не представляющие интереса.

Решая систему относительно C_1, C_2, C_3, C_4 в случае (A) получаем:

$$C_{1,n} = \frac{a}{4k_n^2}\left[\frac{k_n^2 + \lambda_n^2}{a}\left(T_n(0) + \frac{1}{k_n}T_n'(0)\right) + \left(\theta_n(0) + \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right]$$

$$C_{2,n}=\frac{a}{4k_n^2}\left[\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a}\left(T_n(0)-\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)+\left(\theta_n(0)-\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right] \tag{7}$$

$$C_{3,n}=\frac{a}{2k_n^2}\left[\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a}T_n(0)-\theta_n(0)\right], \quad C_{4,n}=\frac{a}{2k_n^2}\left[\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a}\left(\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)-\left(\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right]$$

либо в случае (B)

$$C_{1,n}=\frac{b}{4k_n^2}\left[\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{b}\left(\theta_n(0)+\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)+\left(T_n(0)+\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)\right];$$

$$C_{2,n}=\frac{b}{4k_n^2}\left[\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{b}\left(\theta_n(0)-\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)+\left(T_n(0)-\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)\right]; \tag{8}$$

$$C_{3,n}=\frac{b}{2k_n^2}\left[\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{b}\theta_n(0)-T_n(0)\right];\ C_{4,n}=\frac{b}{2k_n^2}\left[\left(\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)-\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{b}\left(\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right]$$

Лемма 2: *Решение системы (3*) выражаемое начальными данными функций* $T_n(t)$, $\theta_n(t)$, $T_n'(t)$ *и* $\theta_n'(t)$ *представляется в виде (4) (либо (5)), а* C_1, C_2, C_3, C_4 *даны равенствами (7) (либо (8))* .

Доказательство получается подстановкой выражения (7) (в случае (A)) (или (8) в случае (B)) в систему (3*). (См.(6)).

Предположим выполненными следующие равенства

$$\begin{cases} T_n(0)+\dfrac{1}{k_n}T_n'(0)=0, \\ \theta_n(0)+\dfrac{1}{k_n}\theta_n'(0)=0. \end{cases} \tag{9}$$

При выполнении равенств (9) имеем

Лемма 3: *Из равенств (9) следуют равенства* $C_1=0,$ *и* $C_4=-C_3$.

Задача $S_{rj}(D)$: *Найти дважды непрерывно–дифференцируемое ограниченное по* t *при* $t\to\infty$ *решение системы (3) (r=0,1 и j=0,1) в области* $D=\{(t,x): x\in G, t>0\}.$ *удовлетворяющее следующим начальным**:**

$$\begin{cases} rU(0,x)+(1-r)U_t'(0,x)=\varphi(x), \\ jV(0,x)+(1-j)V_t'(0,x)=\psi(x). \end{cases} \tag{10}$$

и краевым условиям:

$$U\,|_S=0,\ \ V\,|_S=0 \tag{11}$$

Равенства (10) при различных значениях $r,\ j$ дадут различные формулировки начальных условий $\left(S_{11}, S_{10}, S_{01}, S_{00}\right)$. Например, для S_{11} ($r=1,\ j=1$) условия (10) принимают вид:

$$U(0,x)=\varphi(x),\quad V(0,x)=\psi(x) \qquad \left(10-S_{11}\right)$$

Далее, нетрудно заметить, что имеет место следующая:

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием существования и единственности ограниченного по t при $t\to\infty$ решения задачи $S_{rj}(D)$ являются равенства* (9).

Принимая во внимание равенства (9) получаем:

S_{11}) в случае (А) (обозначим $T_n(0)=T_n^0;\ \theta_n(0)=\theta_n^0$)

$$C_2=\frac{a}{2k^2_n}\theta_n^0+\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0;\quad C_3=\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0-\frac{a}{2k_n^2}\theta_n^0,\quad C_4=-C_3$$

Следующие ряды обозначим через (S_{11}-А)

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a}{2k^2_n}\theta_n^0+\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0\right)e^{-k_nt}+\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0-\frac{a}{2k_n^2}\theta_n^0\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0+\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2ak_n^2}T_n^0\right)e^{-k_nt}-\left(\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2ak_n^2}T_n^0-\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

Аналогичные формулы получаются и для случая (В).

Через $C_0^{m+\alpha}(D)$-обозначим класс функций обладающих производными m-го порядка и кусочно-непрерывными производными $m+1$-го порядка в области D ($0<\alpha<1$), причем производные четного порядка $2p\le m$, соответственно, равны нулю на S.

Через $H_0^{m,n}(D)$ обозначим класс пар функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, таких, что $\varphi(x)\in C_0^{m+\alpha}(D)$, $\psi(x)\in C_0^{n+\alpha}(D)$.

Условие 2. *Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)\in H_0^{5,3}(D)$, а также выполнены условие (S_{ab}) и равенства (9).*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 2. Тогда функции $U(t,x)$ и $V(t,x)$ определяемые рядами $(S_{11}-A)$(или $(S_{11}-B)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, удовлетворяют системе (3), начальным условиям (10) при r=1 , j=1 и краевым условиям (11) . При этом возможно почленное дифференцирование рядов $(S_{11}-A)$(или $(S_{11}-B)$) по x и t два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Как видно $(S_{11}-A)$

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a}{2k^2_n}\theta_n^0+\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0\right)e^{-k_nt}+\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0-\frac{a}{2k_n^2}\theta_n^0\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0+\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2ak_n^2}T_n^0\right)e^{-k_nt}-\left(\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2ak_n^2}T_n^0-\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

в случае (А) и

$$C_{2,n}=\left[\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}\left(\theta_n(0)\right)+\frac{b}{2k_n^2}\left(T_n(0)\right)\right];$$

$$C_{3,n}=\left[\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n(0)-\frac{b}{2k_n^2}T_n(0)\right];\qquad C_{4,n}=-C_{3,n}$$

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{b}{2k_n^2}T_n^0+\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0\right)e^{-k_nt}+\left(\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0-\frac{b}{2k_n^2}T_n^0\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0+\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2ak_n^2}\theta_n^0\right)e^{-k_nt}-\left(\frac{k_n^4-\lambda_n^4}{2ak_n^2}\theta_n^0-\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

в случае (B), так как

$$C_2=\frac{b}{2k_n^2}T_n^0+\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0;\quad C_3=\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}\theta_n^0-\frac{b}{2k_n^2}T_n^0,\quad C_4=-C_3,\quad \alpha_n^{\pm}=\frac{k_n^2\pm\lambda_n^2}{a}$$

и дважды продифференцированная по t и x ряд выражающий функцию $V(t,x)$ мажорируется рядом $\left|\sum_{m=1}^{\infty}k_n^2\left(\alpha_n^-C_2+\alpha_n^+C_3\right)\right|$, а $k_n^2\alpha_n^{\pm}\approx k_n^4$. Поскольку выполняется условие 2 , то отсюда следует, что выполняются следующие неравенства $\left|T_n(0)\right|\le\frac{1}{n^{5+\nu}}$ и $\left|\theta_n(0)\right|\le\frac{1}{n^{3+\nu}}$ (в случае A) причем $0<\nu<1$. Что и обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость рядов S_{11} и дважды продифференцированных по t и x рядов.

Рассмотрим теперь случай S_{10}, т.е. условия (10) заданы в виде

$$U(0,x)=\varphi(x),\ V'(0,x)=\psi(x)\qquad\left(10-S_{10}\right)$$

в случае (А) имеем:

$$C_1=0,\ C_2=\left(\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0-\frac{a}{2k_n^2}(\frac{1}{k_n}\theta'_{n,0})\right),\ C_3=\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0+\frac{a}{2k_n^2}(\frac{1}{k_n}\theta'_{n,0})\right),\ C_4=-C_3.$$

Следовательно, обозначая через $\left(S_{10}-A\right)$

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0-\frac{a}{2k_n^2}(\frac{1}{k_n}\theta'_{n,0})\right)e^{-k_nt}+\left(\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{2k_n^2}T_n^0+\frac{a}{2k_n^2}(\frac{1}{k_n}\theta'_{n,0})\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a\alpha_n^-}{2k_n^2}\frac{1}{k_n}\theta'_{n,0}+\frac{a\alpha_n^+\alpha_n^-}{2ak_n^2}T_n^0\right)e^{-k_nt}-\left(\frac{a\alpha_n^+\alpha_n^-}{2ak_n^2}T_n^0-\frac{a\alpha_n^+}{2k_n^2}\frac{1}{k_n}\theta'_{n,0}\right)\left(Cosk_nt-Sink_nt\right)\right]X_n(x)$$

Учитывая рассуждения аналогичные при доказательстве предыдущей теоремы получаем.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия 2. Тогда функции* $U(t,x)$ *и* $V(t,x)$ *определяемые рядами* $(S_{10}-A)$ *(или* $(S_{10}-B)$ *имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, удовлетворяют системе (3), начальным условиям* $(10-S_{10})$ *при r=1 , j=0 и краевым условиям (11) . При этом возможно почленное дифференцирование рядов* $(S_{10}-A)$ *(или* $(S_{10}-B)$*) по x и t два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.*

Аналогично, можно привести доказательства теорем для случаев S_{01},S_{00}.

Пусть $\Omega_N^{\infty}=\{(t,x):x\in\Omega,t>0\}$, причем Ω-произвольная N-мерная область, содержащаяся вместе с границей Γ (типа Ляпунова) в некоторой открытой N-мерной области D, $x=(x_1,x_2,...,x_N)$, Ω_N^{∞}-$(N+1)$- мерный цилиндр. Пусть L-определенный в области D самосопряженный дифференциальный оператор

$$Lu=\sum_{ij=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]-c(x)u \tag{12}$$

эллиптического типа, т.е. такой, что всюду в области D

$$c(x)>0,\quad a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\quad \sum_{ij=1}^{N}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\sum_{i=1}^{N}a\xi_i^2,\quad a=const>0, \tag{13}$$

для всех вещественных ξ_i. Кроме того, предполагается, что

$$a_{ij}(x)\in C^{(k+1)}(\Omega),\quad c(x)\in C^{(k)}(\Omega),\quad k=\left[\frac{N}{2}\right]+1. \tag{14}$$

Исследуем вопрос о разрешимости начально-краевой задачи для системы

$$\begin{cases}U_{tt}+LU=aV,\\ V_{tt}-LV=bU.\end{cases} \tag{15}$$

Задача $S_{rj}(\Omega_N^{\infty})$**.** *Найти дважды непрерывно-дифференцируемое решение системы (15) в области* $\Omega_N^{\infty}=\{(t,x):x\in\Omega,t>0\}$ *ограниченное при* $t\to\infty$, *непрерывное в* $\overline{\Omega}_N^{\infty}$ *и удовлетворяющее следующим начальным условиям:*

$$\begin{cases}rU(0,x)+(1-r)U'_t(0,x)=\varphi(x),\\ jV(0,x)+(1-j)V'_t(0,x)=\psi(x).\end{cases} \tag{16}$$

и краевым условиям:

$$U(t,x)\big|_{\Gamma}=V(t,x)\big|_{\Gamma}=0 \tag{17}$$

причём $r=0,1$ и $j=0,1$, то есть имеем задачи S_{11}, S_{10}, S_{01}, S_{00}.

Следуя [4] будем искать все решения системы уравнений (15), представимые в виде $U(t,x)=T(t)X(x)$ и $V(t,x)=\theta(t)X(x)$, а также удовлетворяющие начальным и краевым условиям (16) и (17). Решение этой задачи ищется в виде разложений в ряды по собственным функциям следующей задачи:

$$LX+\lambda X=0,\quad X(x)\big|_{Г}=0, \qquad (18)$$

О свойствах собственных функций и собственных значений задачи (18) см. [4,стр.101]. Пусть $\{X_n(x)\}$ система собственных функций, а $\{\lambda_n\}$ система собственных значений задачи (18).

Аналогично предыдущему случаю получаем:

$$T_n(t)=C_1e^{k_nt}+C_2e^{-k_nt}+C_3Cosk_nt+C_4Sink_nt \qquad (4)$$

$$\theta_n(t)=\left[\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{a}(C_1e^{k_nt}+C_2e^{-k_nt})-\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{a}(C_3\cos k_nt+C_4\sin k_nt)\right]$$

либо

$$\theta_n(t)=C_1e^{k_nt}+C_2e^{-k_nt}+C_3Cosk_nt+C_4Sink_nt, \qquad (5)$$

$$T_n(t)=\frac{k_n^2+\lambda_n^2}{b}\left(C_1e^{k_nt}+C_ne^{-k_nt}\right)-\frac{k_n^2-\lambda_n^2}{b}(C_3Cosk_nt+C_4Sink_nt)$$

Аналогично предыдущему для $T_n(0),\ \theta_n(0),T_n'(0),\theta_{\partial n}'(0)$ получаем систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1,C_2,C_3,C_4.

Решая полученную систему и подставляя соответствующие функции $T_n(t),\ \theta_n(t)$ из формул (4) или (5), а также $X_n(x)$- собственная функция оператора L.(см.(18)) имеем

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x),\ V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)X_n(x). \qquad (19)$$

Условие 3*:* *Пусть коэффициенты* $a_{ij}(x),\ c(x)$ *удовлетворяют условиям (13), (14), а также* $\varphi(x),\ \psi(x)\in H_0^{5,3}(\Omega)$ *и пусть выполнены условие* (S_{ab}) *и равенства (9).*

Теорема 6. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям 3. Тогда функции* $U(t,x)$ *и* $V(t,x)$ *представленные рядами (19) имеют производные до второго порядка включительно, удовлетворяют системе (15). При этом возможно почленное дифференцирование рядов (19) по x и t два раза и полученные при этом ряды сходятся абсолютно и равномерно.* См. также [13,14].

Выражаю благодарность академику АН Республики Узбекистан Ш. А. Алимову за обсуждение и ценные советы, благодаря которым появились работы [15-17] и настоящая работа.

Литература:

1. Hadamard J. Proprietes d'une lineare aux derivies partielles du quatrieme ordre. Tohoky Math. − 1933. - V.37.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. − М. , Мир. , 1964г.,815стр.
3. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., Гостехиздат, 1953 г.
4. Ильин В.А.О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. Успехи математических наук,1960,т.15, вып. 2(92), стр. 97-154.
5. Алимов Ш.А. Избранные научные труды, Ташкент, 2015г. Мериюс, 286стр.
6. Джураев А.Д. Методы сингулярных интегральных уравнений. М.,Наука,1987,415стр.
7. Зикиров О.С. Об одной задаче типа Дирихле для уравнения составного типа. Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика.Физика».2016.,том 8,№2, стр.19-26.
8. Кожанов А.И. Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка. Сиб. электрон. математ. изв.12(2015)., стр.842-853.
9. Алсыкова А.А. Начально-краевая задача с интегральными граничными условиями для одного класса уравнений составного типа. Вестник Бурятского Государственного Университета, 2013, №9, с.119-129.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М.,Наука,1981, 511стр.
11. Карман Т. и Био М. Математические методы в инженерном деле. ГИТТЛ.1948, М-Л, II издание, 422стр.
12. Коллатц А. Задачи на собственные значения., Наука., Гл. ред. физ - мат. лит., Москва,1968, 503стр.
13. Сраждинов И.Ф. «О разрешимости смешанных задач для систем составного типа ». Uzbek mathematical journal, 2010, N3, стр.121-130.
14. Сраждинов И.Ф. Об одной составной системе с коэффициентом типа Лежандра. ДАН РУз, 2016, N5, стр.7-10.
15. Сраждинов И.Ф. О разрешимости смешанной задачи для одной системы составного типа. Тезисы докладов Международной научной конференции, Фергана., ФерГУ, 12-13 марта 2020г., стр.145-149.
16. Сраждинов И.Ф. Разрешимость начально – краевой задачи для одной системы составного типа. Москва, Межвузовск. научный конгресс. Высшая школа: Науч. исследования., том 2, Инфинити, 28 мая 2020,стр.145-152. Индекс DOI 37.10.34660/INF.2019.62.47.001.
17. Сраждинов И.Ф. О разрешимости смешанной задачи для одной системы составного типа. Республ. науч.конф."Совр. методы мат. физ. и их прилож.", Ташкент, 17-18 ноября 2020, том 1, стр.264-269; там же стр.269-274

